



TITLE:

ℓ_∞ 上2重可移の有限射影平面について(有限群論)

AUTHOR(S):

平峰, 豊

CITATION:

平峰, 豊. ℓ_∞ 上2重可移の有限射影平面について(有限群論). 数理解析研究所講究録 1982, 475: 162-169

ISSUE DATE:

1982-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103293>

RIGHT:

l_∞ 上 2 重可移の有限射影平面について

大阪大学教養部

平 峰 豊

(Yutaka Hiramune)

点 l_∞ 上 2 重可移に作用する collineation group をもつ有限射影平面はデザルグ平面に限ることが Ostrom-Wagner [4] により証明されている。デザルグ平面の直線を一つ固定し l_∞ とおく。 l_∞ 上の任意の点 P_1, Q_1, P_2, Q_2 (ただし $P_1 \neq Q_1, P_2 \neq Q_2$) ととると、2 重可移性より適当な collineation x があって、

$P_1^x = P_2, Q_1^x = Q_2$ となる。一方では $(l_\infty)^x = (P_1 Q_1)^x = P_2 Q_2 = l_\infty$ である。従って l_∞ を固定する collineation 全体からなる部分群は l_∞ 上 2 重可移に作用する。つまり、デザルグ平面は次の性質 [P] をもつ。

[P] ある直線 l_∞ 上 2 重可移に作用する collineation group G をもつ。

逆は成り立たない。つまり性質 [P] をもつ、デザルグ平面でない射影平面が存在する。Lüneburg plane [2] がその例である。

以下では性質 [P] をもつ射影平面について考える。射影平面の order 及び群の位数等はすべて有限であるとする。

1. Translation plane の定義及び Lüneburg plane

知られている有限射影平面の多数が. translation plane と呼ばれる類の中に入る。Andréの方法により translation plane を定義する。(詳細は[3]の第1章参照)

$q = p^r$ を素数 p の r 乗とし. V を位数が q^2 の elementary abelian p -群であるとする。 V の $q+1$ 個の部分群 V_1, V_2, \dots, V_{q+1} がすべて位数 q で, かつ $V^\# = V - \{0\}$, $V_i^\# = V_i - \{0\}$ とするとき, 次をみたすとする。

$$V^\# = V_1^\# \cup V_2^\# \cup \dots \cup V_{q+1}^\# \quad (\text{disjoint sum})$$

このとき, $P_1^\infty, P_2^\infty, \dots, P_{q+1}^\infty$ を V に属さない $q+1$ 個の“記号”として次のように点と直線を定める。 $V_i + x$ を $x \in V$ を含む V/V_i の剰余類, $\ell_x^{(i)} = V_i + x \cup \{P_i^\infty\}$ とおくとき。

$$\text{点全体の集合 } \mathcal{P} = V \cup \{P_1^\infty\} \cup \{P_2^\infty\} \cup \dots \cup \{P_{q+1}^\infty\}$$

$$\text{直線全体の集合 } \mathcal{L} = \{\ell_x^{(i)} \mid 1 \leq i \leq q+1, x \in V\} \cup \{\ell_\infty\}$$

Incidence: 集合としての包含関係

ここで P_i^∞ ($1 \leq i \leq q+1$) を無限遠点, $\ell_\infty = \{P_1^\infty, P_2^\infty, \dots, P_{q+1}^\infty\}$ を無限遠直線という。剰余類 V/V_i , $1 \leq i \leq q+1$ は次の性質をもつ。

$$x, y \in V, V_i + x \neq V_i + y \Rightarrow V_i + x \cap V_i + y = \emptyset$$

$$i \neq j \Rightarrow |V_i + x \cap V_j + y| = 1 \quad \forall x, y \in V.$$

このことにより $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ は射影平面となることが容易に示される。このような $(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ に同型となる射影平面を translation plane という。

$V = V(2, GF(q))$ とし, V_1, V_2, \dots, V_{q+1} を V の 1次元 $GF(q)$ -部分空間の全体として得られる translation plane は デカルツ平面と同型になる。従ってデカルツ平面は translation plane である。

$q = 2^m$ (m は 3以上の奇数) とし $q_0 = q^2$ とおく。

$GL(4, q)$ は Suzuki 群 $Sz(q)$ と同型な部分群を含む。これを G とする。 G の 2-Sylow 群全体の集合を \mathcal{S} とし,

$V = V(4, q)$, $\mathcal{P}_2 = \{C_V(Z(S)) \mid S \in \mathcal{S}\}$ とおくと次が成り立つことが確かめられる。

$$|V| = q_0^2, \quad |V_i| = q_0 \quad \forall V_i \in \mathcal{P}_2, \quad |\mathcal{P}_2| = q_0 + 1$$

$$V^\# = \bigcup_{V_i \in \mathcal{P}_2} V_i^\# \quad (\text{disjoint sum})$$

従って上述の André の方法により translation plane が構成される。この平面を Lüneburg plane $L(q)$ という。

G は $GL(4, q)$ の部分群として V に自然に act するが、Suzuki 群の性質により G は conjugation で \mathcal{S} 上 2 重可移である。

一方では G は無限遠直線 l_∞ 上の点の全体 $\{P_1^\infty, P_2^\infty, \dots, P_{q_0+1}^\infty\}$ を集合として固定するから、この上に 2 重可移に作用する

collineation group となっている。つまり、Lüneburg plane $L(q)$ は、性質 $[P]$ をもつ射影平面である。

2. 性質 $[P]$ をもつ射影平面

上で述べたように、デカルク平面及び Lüneburg plane はいずれも translation plane でありかつ性質 $[P]$ をもつものであったが、性質 $[P]$ をもつ射影平面はこの2種類しか知られていない。これについては translation plane であるという条件のもとで次の証明されている。

定理1 (Schulz, Czerwinski [3] §39) translation plane π が性質 $[P]$ をもち、次の条件をみたすとある。

(*) π の order が奇数の場合は Baer involution を含まない。
このとき π はデカルク平面か又は Lüneburg plane である。

知られている射影平面の多くのものが translation plane として得られていることは先に述べたが、すべての射影平面の中ではかなり特別なものであろうと予想される。 $[P]$ をみたす射影平面を translation plane であるという仮定なしで決定することが望ましいと思われる。

これについては G. Korchmáros[1]により次の定理が得られている。

定理 2 (Korchmáros) 性質 [P] をもつ射影平面 π の order が 2^r であるとき (a) π は デカルト 平面 であるか、又は 次のいずれかが成り立つ。

$$H = \langle t \mid t \in G, t^2 = 1, t \text{ は elation であらう} \rangle$$

axis としない \rangle とおくとき

$$(b) H \cong S_2(2^r) \quad r=2, 3 \quad \text{又は}$$

$$(c) H \cong PSU(3, 2^r) \quad r=3, 4$$

($H^{l\omega}$ はいずれも通常の 2 重可移表現)

ある直線上の点の数から 1 引いたものが射影平面の order であるか。知られている有限射影平面ではすべて order は素数の巾乗になっていて、そうでないものは知られていない。上の定理の仮定 “order が 2^r ” の部分は order が偶数の場合は自然なものであるのはこのことによる。しかし、単純群の分類定理を仮定するならば、regular normal subgroup をもたない 2 重可移群はすべて決まるので、その一つ一つについて性質 [P] をもつ射影平面があるかないかを確かめることができる。次が分かる。

補題 3. [P] をみたす射影平面 π の order が偶数で、 $G^{l\omega}$ が regular normal subgroup を含まなければ、order は 2 の巾である。

3. Case (C) : $G^{\text{Lü}} \triangleright \text{PSU}(3, q)$ について

デカルツ平面及び Lüneburg plane はそれぞれ定理 2 の (a), (b) をみたす例となっている。定理 1, 2, 補題 3 からみて次が成り立つであろうと予想される。

“Conjecture” : order が偶数で、性質 [P] をもつ射影平面はデカルツ平面か又は Lüneburg plane である。

“Conjecture” を示す一つの step として、定理 2 の (C) の場合が起りえないことを証明しなければならない。これについては次の定理が知られている最良のものと思われる。

定理 4 (Schulz [5]) (C) において、 H が fixed point をもち、かつ $\Delta \equiv 1 \pmod{2}$ ならば (C) をみたす射影平面は存在しない。

これに関して次が証明できた。

定理 5 (C) において H が fixed point をもたないならば、(C) をみたす射影平面は存在しない。

従って (C) については次が証明できればよいことが分かる。

問題 6 (C) において H が fixed point をもち、かつ $\Delta \equiv 0 \pmod{2}$ ならば (C) をみたす射影平面は存在しないことを示せ。

問題 6 のような射影平面が存在するとすれば、 G の affine points 上への作用は置換群として完全に決まる ([5] p 262)。

このことを用いて、このような射影平面の存在するための必要十分条件を群 H の両側分解についての条件で述べることができる。

補題 7. $H = PSU(3, q)$ の 2-Sylow 群の一つを S , その H での normalizer を $SD (\triangleright S)$; $|S| = q^3$, $D \simeq \mathbb{Z}_{q^2-1}$ とおき。

$1 \neq t \in N_H(D)$, $t^2 = 1$, $Z = Z(S)$, $D = V \times K$, $V \simeq \mathbb{Z}_{q+1}$,

$K \simeq \mathbb{Z}_{q-1}$, $M = ZV$ とおく。このとき問題 6 の射影平面

が存在するための必要十分条件は、 H の元 x_1, x_2, \dots, x_{q-1} ,

及び Z を含む S の order q^2 の部分群 S_0 が存在して、

H が (B, S_0) , (S, S_0) , (S_0, S_0) により次のように両側分解

されることである。ここで $B = SD$ とする。

$$H \cdot B = B \cdot B = B \{x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, t\} S_0$$

$$= S \cdot M \{x_1, x_2, \dots, x_{q-1}\} S_0$$

$$= S_0 \cdot S^\# \cdot S_0 \cup \left(\bigcup_{i \neq j} S_0 x_i^{-1} M x_j S_0 \right) \cup \left(\bigcup_i S_0 x_i^{-1} M^\# x_i S_0 \right)$$

この補題を用いて、問題 6 をみたす射影平面が存在するための必要十分条件は、 H を表現している有限体 $GF(q^2)$ の中のいくつかの方程式として表わすことが可能となる。一般的に非存在を示すにはこれらの方程式は複雑すぎるが、 q の

値が小さいときには計算が可能である。 $q=4$ では次が成り立つ。

定理 8 $\text{PSU}(3,4)$ が ℓ_∞ 上 2 重可移作用ある order 64 の射影平面は存在しない。

文 献

- [1] G. Korchmáros : Collineation groups doubly transitive on the points at infinity in an affine plane of order 2^r . Arch. Math. 37. (1981) 572-576.
- [2] H. Lüneburg : Über projektive Ebenen, in denen jede Fahne von einer nicht trivialen Elation invariant gelassen wird. Abh. Math. Sem. Hamburg 29. (1965) 37-76.
- [3] H. Lüneburg : Translation Planes. Springer-Verlag, 1980.
- [4] T. G. Ostrom - A. Wagner : On projective and affine planes with transitive collineation groups, Math. Z. (1959) 186-199.
- [5] R. H. Schulz : Über Translationsebenen mit Kollineationsgruppen, die die Punkte der ausgezeichneten Geraden zweifach transitiv permutieren. Math. Z. 122. (1971) 246-266.